

MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA EMPURRADOR- BARCAÇA EM ÁGUAS RASAS

ANTONIO EDUARDO ASSIS AMORIM¹

¹Fatec JAHU - Construção Naval

Aea.amorim@fatec.sp.gov.br

Mathematical Modeling of a Push Boat–Barge System in Shallow Waters

Eixo Tecnológico: *Produção Industrial*

Resumo

O trabalho desenvolvido propõe um modelo matemático para analisar a manobrabilidade de comboios compostos por empurradores e barcaças na hidrovia Tietê-Paraná, com especial atenção às condições de águas rasas. A pesquisa iniciou com uma revisão sistemática de estudos sobre sistemas de propulsão, leme, interação casco-fluido e derivados hidrodinâmicos, focando na adaptação desses modelos para águas rasas. O modelo matemático foi implementado em Python, considerando diferentes arranjos de barcaças (1 x 2, 2 x 2 e 2 x 3), com o objetivo de simular e avaliar as curvas de manobra em condições de águas rasas e profundas. Os resultados indicaram que a profundidade da água tem um impacto significativo na manobrabilidade, aumentando a curvatura da trajetória em águas rasas. A aplicação prática do estudo se mostra essencial para otimizar a eficiência e segurança das operações de navegação fluvial, contribuindo para o planejamento e gerenciamento da hidrovia. O estudo avança na modelagem matemática de manobras, oferecendo uma ferramenta para aprimorar as práticas de transporte por via interior, com base nas condições específicas da hidrovia Tietê-Paraná.

Palavras-chave: Manobrabilidade, Hidrovia, Modelagem matemática, Águas rasas, Empurrador-barcaça.

Abstract

The developed work proposes a mathematical model to analyze the maneuverability of convoys composed of push boats and barges on the Tietê-Paraná waterway, with special attention to shallow water conditions. The research began with a systematic review of studies on propulsion systems, rudders, hull-fluid interaction, and hydrodynamic derivatives, focusing on adapting these models for shallow waters. The mathematical model was implemented in Python, considering different barge arrangements (1 x 2, 2 x 2, and 2 x 3), with the goal of simulating and evaluating maneuvering trajectories in both shallow and deep water conditions. The results indicated that water depth has a significant impact on maneuverability, increasing the trajectory curvature in shallow waters. The practical application of the study is essential for optimizing the efficiency and safety of inland waterway operations, contributing to planning and management of the waterway. The study advances in the mathematical modeling of maneuvers, providing a tool to enhance inland waterway transport practices, based on the specific conditions of the Tietê-Paraná waterway.

Key-words: Maneuverability, Waterway, Mathematical modeling, Shallow water, Pusher-barge.

1. Introdução

Este estudo apresenta a análise e o desenvolvimento de um modelo matemático para a manobra de embarcações compostas por um empurrador e um conjunto de barcaças na hidrovia Tietê-Paraná. A pesquisa abrangeu uma revisão sistemática dos sistemas de propulsão, do leme e da interação casco-fluido, com ênfase na incorporação de termos específicos para águas rasas, os quais foram introduzidos no modelo matemático proposto. Este modelo foi utilizado para simular a dinâmica de manobras das embarcações em diferentes condições de profundidade da água. As curvas de manobra foram geradas para diversos arranjos de barcaças, incluindo configurações de 1 x 2, 2 x 2 e 2 x 3 barcaças, permitindo a análise detalhada das variações no desempenho de navegação em função da profundidade e do número de unidades acopladas. Os resultados obtidos fornecem uma visão dos efeitos dos modelos matemáticos propostos na

manobra do comboio, contribuindo para uma melhor compreensão dos impactos das características dos seus parâmetros na manobrabilidade das embarcações.

A justificativa para este estudo está baseada na importância da navegação fluvial na hidrovia Tietê-Paraná, que desempenha um papel fundamental no transporte de carga na região, particularmente no transporte de grãos e outros produtos de Mato Grosso. A eficiência e segurança das operações de navegação nesta hidrovia são essenciais não apenas para a economia da região, mas também para a redução do impacto ambiental, considerando a substituição do transporte rodoviário por alternativas mais sustentáveis, como o transporte fluvial.

Entretanto, a manobrabilidade das embarcações compostas por empurradores e barcaças em águas rasas representa um desafio significativo devido às complexas interações entre o casco da embarcação e o fluido, além das forças geradas pelo leme. As condições variáveis de profundidade da água e a configuração das barcaças impactam diretamente a eficiência e a segurança das manobras, exigindo um estudo aprofundado para otimizar esses processos.

Embora estudos anteriores tenham abordado modelos de propulsão e interação casco-fluido, poucos consideraram a inclusão de termos específicos para águas rasas e as peculiaridades dessa região hidroviária. A incorporação desses termos no modelo matemático, proposta por este estudo, permite uma análise mais precisa e aplicável às condições reais da hidrovia Tietê-Paraná, levando em conta a variação da profundidade da água e os diferentes arranjos de barcaças, como os modelos de 1 x 2, 2 x 2 e 2 x 3 barcaças.

Portanto, este estudo justifica-se pela necessidade de avançar na compreensão dos efeitos das águas rasas na manobrabilidade das embarcações na hidrovia Tietê-Paraná, oferecendo informações valiosas para a melhoria da eficiência operacional e segurança na navegação. Além disso, a adoção de um modelo matemático mais completo e adaptado às condições locais contribui para o desenvolvimento de soluções mais eficazes, sustentáveis e seguras para o transporte fluvial.

A navegação fluvial na hidrovia Tietê-Paraná é um componente essencial do transporte de carga na região, especialmente no deslocamento de produtos como grãos de Mato Grosso para o mercado. O transporte é realizado por embarcações compostas por empurradores e barcaças, sendo essas operações fundamentais para a economia regional. No entanto, a navegação de comboios formados por empurrador-barcaça apresenta desafios significativos relacionados à manobrabilidade, especialmente em condições de águas rasas, comuns em diversos trechos dessa hidrovia.

O comportamento das embarcações em águas rasas é influenciado por uma série de fatores, como a profundidade da água, o arranjo das barcaças e a interação entre o casco da embarcação e o fluido. Esses fatores impactam diretamente a resistência ao movimento, a formação de ondas, a eficiência do sistema de propulsão e a eficácia dos dispositivos de manobra, como o leme. Em especial, a mudança na profundidade da água pode alterar as condições hidrodinâmicas da embarcação, resultando em um aumento significativo na resistência ao avanço e na redução da manobrabilidade.

Este estudo visa preencher essa lacuna ao desenvolver um modelo matemático que incorpora termos específicos para águas rasas e ao gerar curvas de manobra adaptadas às condições da hidrovia Tietê-Paraná. A partir disso, busca-se proporcionar uma análise mais precisa da dinâmica de navegação, permitindo a otimização do desempenho das embarcações e o aumento da segurança e eficiência nas operações de transporte fluvial.

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver e aplicar um modelo matemático adaptado às condições de navegação na hidrovia Tietê-Paraná, focando na manobrabilidade de

Anais da VIII Mostra de Docentes em RJ

embarcações compostas por empurrador e barcaças, especialmente em águas rasas. Para tanto, teve como objetivos específicos:

- Desenvolver um modelo matemático para a manobra de embarcações em águas rasas, incorporando termos que considerem os efeitos das águas rasas sobre a interação casco-fluido;
- Simular as manobras de embarcações com diferentes arranjos de barcaças, por meio da codificação em Python;
- Analisar a dinâmica de navegação nas condições específicas da hidrovia e compreender como a profundidade da água, a carga das barcaças e o arranjo do comboio, afetam a manobra.

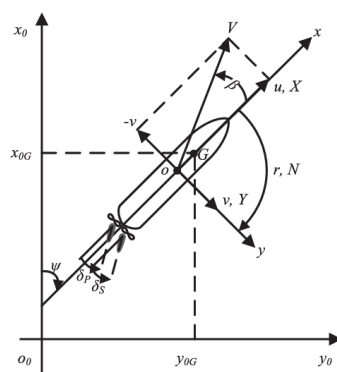
Os resultados esperados deste estudo incluem uma análise detalhada da resistência ao movimento das embarcações compostas por empurrador e barcaças, considerando diferentes profundidades de água na hidrovia Tietê-Paraná. Espera-se identificar como as águas rasas afetam a interação entre o casco e o fluido, impactando a eficiência da navegação e o desempenho da embarcação. Além disso, a comparação entre diferentes arranjos de barcaças (1 x 2, 2 x 2 e 2 x 3) permitirá avaliar como a configuração do comboio influencia a manobrabilidade e a resistência ao movimento, oferecendo uma visão clara da eficiência de cada arranjo.

Outro resultado importante será a geração de curvas de manobra adaptadas às condições locais da hidrovia, fornecendo uma ferramenta útil para otimizar as operações de transporte fluvial. As simulações e as curvas de manobra, obtidas a partir do modelo matemático implementado em Python, contribuirão para o planejamento e a melhoria da segurança e eficiência nas operações. Com a incorporação de termos para águas rasas, espera-se obter uma compreensão mais precisa dos efeitos dessa condição nas forças hidrodinâmicas, aprimorando o desempenho do sistema de propulsão e a eficácia dos dispositivos de manobra.

2. Modelagem matemática

A análise de manobra de uma embarcação é feita considerando dois Sistemas de referência: um fixo na Terra e outro fixo na embarcação, como é mostrado na Fig. 1.

Fig. 1 – Sistema de referência fixo na Terra e na embarcação. u, v, V são as velocidades, r é a velocidade de rotação, X, Y são as forças e N é o torque. B é o ângulo de escorregamento, ψ é o ângulo compreendido entre a embarcação e o referencial fixo na Terra.



Fonte: (Liu, J.; Hekkenberg et al., 2017)

As equações dinâmicas da embarcação, para três graus de liberdade são

$$X = (m + m_x)\dot{u} - (m + m_y)v_m r - x_G m r^2, \quad (1)$$

$$Y = (m + m_y)\dot{v}_m + (m + m_x)ur + X_G m \dot{r}, \quad (2)$$

$$N = (I_G + x_G^2 m + J_G)\dot{r} + x_G m(\dot{v}_m + ur), \quad (3)$$

na qual x_G é a posição do centro de gravidade (CG) da embarcação m_x, m_y são as massas adicionais, J_G é o momento de inércia adicional, m é a massa da embarcação, I_G é o momento de inércia em torno do CG.

As forças e o torque considerado dependem da interação fluido-casco, chamada força hidrodinâmica (H), do propulsor (P) e do leme (R),

$$X = X_P + X_R + X_H, \quad (4)$$

$$Y = Y_H + Y_R, \quad (5)$$

$$N = N_H + N_R + N_P. \quad (6)$$

2. Materiais e métodos

A revisão sistemática é uma abordagem rigorosa e estruturada que visa sintetizar evidências de pesquisas existentes, permitindo uma melhor compreensão dos métodos e práticas associados ao conceito.

2.1. Materiais

Para a busca de artigos foi usado o software Publish or Perish. Para a codificação foi usado o Python.

2.2. Metodologia

Para efetuar a busca das referências bibliográficas usou-se o aplicativo Publish or Perish. Para o seu uso é preciso definir as palavras-chave de busca e a base de dados. Com a base de dados obtidas, define-se então os critérios de elegibilidade e os de exclusão.

Para o caso em questão foram escolhidas as palavras-chave: “pusher and barge” AND “maneuver”. No caso que a busca envolvia Sistema de propulsão se usava OR “propulsion”. Caso fosse leme OR “rudder”. Se fosse massa adicional OR “added mass”.

A base de dados utilizada é a Google Scholar. Os critérios de elegibilidade eram que se tratava de comboios e deveriam dispor de equações relativas ao assunto. O critério de exclusão era que os artigos seriam excluídos se não estivessem no idioma inglês, português ou espanhol.

Com base na base de dados coletados, passou-se a leitura dos resumos, separando os que tratavam exclusivamente de comboios.

Após esta seleção, fez-se a separação pelos temas derivadas hidrodinâmicas, propulsão e lemes e a respectiva leitura dos estudos, avaliando os termos.

Após a leitura, fez-se a modelagem matemática para a embarcação, com a respectiva codificação em Python.

3. Resultados e Discussão

Com base na revisão sistemática sobre massa adicional foram obtidos 200 artigos sobre o assunto na base Google Scholar. Na base Scopus foi encontrado apenas 1 artigo. Sobre propulsão foram encontrados 200 artigos na base Google Scholar e 7 na Scopus. Sobre leme,

Anais da VIII Mostra de Docentes em RJ

200 no Google Scholar e 6 na Scopus. Por fim, sobre derivadas hidrodinâmicas, 200 no Google Scholar e 5 na Scopus.

A massa adicional decorre da energia necessária para movimentar a água quando um objeto passa por ela. Existem duas abordagens, a expressão normal e outra que sugere que o movimento de avanço na afeta o movimento transversal. Adotou-se para a modelagem o termo

$$X_A = X_{\dot{u}}\dot{u} - Y_{\dot{v}}vr - Y_{\dot{r}}r^2, \quad (7)$$

$$Y_A = Y_{\dot{v}}\dot{v} + Y_{\dot{r}}\dot{r} + X_{\dot{u}}ur, \quad (8)$$

$$N_A = Y_{\dot{r}}\dot{r} + N_{\dot{r}}\dot{r} - (X_{\dot{u}} - Y_{\dot{v}})uv + \frac{Y_{\dot{r}} + N_{\dot{v}}}{2} uv. \quad (9)$$

Para a parte da interação casco-fluido, foram encontrados 200 artigos sobre o tema na base Google Scholar e 32 na Scopus. Após a revisão da literatura, foi adotado o seguinte modelo

$$X_H = 0,5\rho L d U^2 \left(X_{\beta r} \frac{rL}{U} \sin \beta + X_{uu} \cos \beta \right), \quad (10)$$

$$Y_H = 0,5\rho L d U^2 \left\{ Y_{\beta} \beta + Y_{\dot{r}} \frac{rL}{U} + Y_{\beta\beta} \beta |\beta| + Y_{rr} \frac{rL^2}{U^2} |r| + \left[Y_{\beta\beta r} + Y_{\beta rr} \frac{rL}{U} \right] \beta \frac{rL}{U} \right\} \quad (11)$$

$$N_H = 0,5\rho L d U^2 \left\{ N_{\beta} \beta + N_{\dot{r}} \frac{rL}{U} + N_{\beta\beta} \beta |\beta| + N_{rr} \frac{rL^2}{U^2} |r| + \left[N_{\beta\beta r} \beta + N_{\beta rr} \frac{rL}{U} \right] \beta \frac{rL}{U} \right\} \quad (12)$$

A inclusão dos termos relacionados com a profundidade do canal H envolve a multiplicação dos coeficientes pela expressão

$$f(h) = 1 - \frac{d}{H}. \quad (13)$$

Para a parte de propulsão foram encontrados 200 artigos na base Google Scholar e 7 na Scopus. O fluxo de água que chega no propulsor depende da geometria do casco da embarcação, assim como do leme, já que a sua presença gera campos de pressão na parte anterior. A expressão para o propulsor é dada por

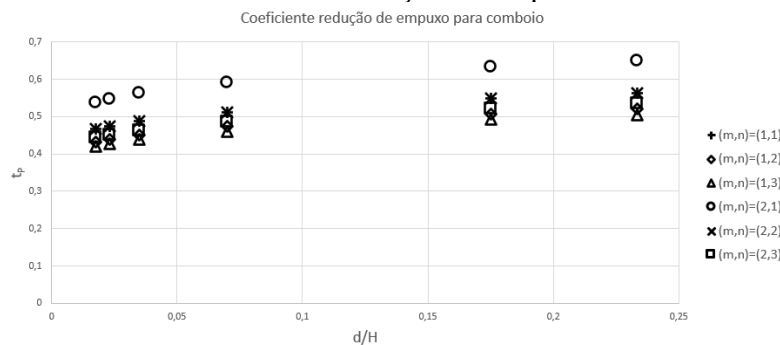
$$X_P = C_{tP} (1 - t_P) \rho n^2 D_P^4 K_T (J_P), \quad (14)$$

na qual C_{tP} é uma constante, t_P é o fator de redução do empuxo do propulsor, a variável n é a rotação do hélice em unidades SI (rps) e D_P é o diâmetro do hélice [1]. Vários autores sugerem diferentes termos para t_P . Para o trabalho foi considerado o termo

$$t_P = 0,6[0,23 + 1,4(C_B - 0,5)^2] \left(1 + \frac{B}{L} \right) \left[1 + \left(\frac{d}{H} \right)^{0,196} \right], \quad (15)$$

na qual B é a boca da embarcação, C_B é o coeficiente de bloco. A Fig. 2 mostra a dependência do fator de redução de empuxo em termos da profundidade do canal. Quanto menor a profundidade, maior é o fator de redução.

Fig. 2 – Dependência do coeficiente de redução de empuxo em termos da profundidade



Fonte: (Amorim, 2025)

Para o comboio HTP será usada a fórmula de Hirano,

$$w_p = w_{p0} \exp(-4\beta_p^2), \quad (16)$$

Anais da VIII Mostra de Docentes em RJ

com o ângulo β'_p sendo dado por

$$\beta'_p = \beta - x'_p \frac{rL}{U}, \quad (17)$$

na qual x'_p é a coordenada longitudinal do sistema de propulsão [2]. A origem do sistema de referência móvel estará no empurrador, de forma que ($x_p \approx 0$), então $x'_p = \frac{x_p}{L} = 0$.

O ângulo β é dado por

$$\beta = -\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right). \quad (18)$$

O coeficiente de esteira pode ser adaptado pelos termos usados por outros autores [2,3]. Para a modelagem foi adotado o termo

$$w_{p0} = 0,5572 \left(\frac{d}{H}\right)^{1,034}. \quad (19)$$

Para o leme, foram encontrados 246 artigos na base de dados do Google Scholar e 9 no Scopus.

As forças que interagem no leme são

$$X_R = -(1 - t_R)F_N \sin \delta, \quad (20)$$

$$Y_R = -(1 + a_H)F_N \cos \delta, \quad (21)$$

$$N_R = -(x_R + a_H x_H)F_N \cos \delta, \quad (22)$$

na qual t_R é o coeficiente de redução de empuxo do leme, δ é o ângulo do leme, x_R é a distância entre o CG da embarcação e o centro da força lateral e representa a localização do leme, x_H é a distância entre o CG da embarcação e o centro da força lateral, a_H é uma constante e

$$F_N = 0,5\rho A_R C_N U_R^2 \sin(\delta - \gamma\beta_R), \quad (23)$$

com A_R sendo a área do leme,

$$\beta_R = \beta - 2x'_R \frac{rL}{U},$$

em que x'_R é uma constante. Como o referencial está na popa do empurrador, então $\beta_R = \beta$.

O termo que descreve o gradiente da força de sustentação (lift) do leme é

$$C_N = \frac{6,13K_R}{K_R + 2,25}, \quad (24)$$

na qual K_R é a razão do aspecto do leme [3].

A velocidade do fluido que passa no leme utilizado é

$$U_R^2 = (1 - w_R)^2(1 + Cg(s)), \quad (25)$$

com

$$g(s) = \eta K[2 - (2 - K)s] \frac{s}{1-s^2}, \quad (26)$$

em que

$$s = 1 - (1 - w_{p0}) \frac{u}{n_P}, \quad (27)$$

com P sendo o passo do hélice [4].

Tem-se que

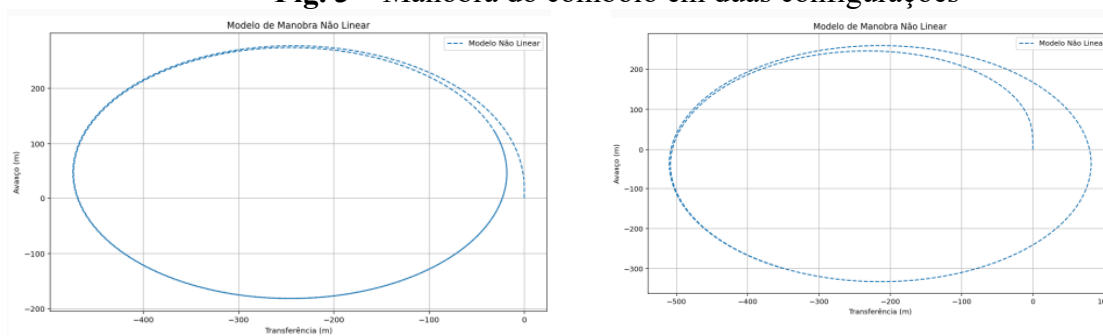
$$a_H = -11,4036 + 40,94C_B - 81,11 \frac{2d}{L} - 31,69C_B^2, \quad (28)$$

e

$$t_R = -0,629C_B^2 + 0,605C_B + 0,129. \quad (29)$$

Com base nestas expressões analisa-se as trajetórias do comboio. A codificação foi feita no Python. A Fig. 3 mostra a manobra para o comboio 1 x 2, 2 x 2.

Fig. 3 – Manobra do comboio em duas configurações

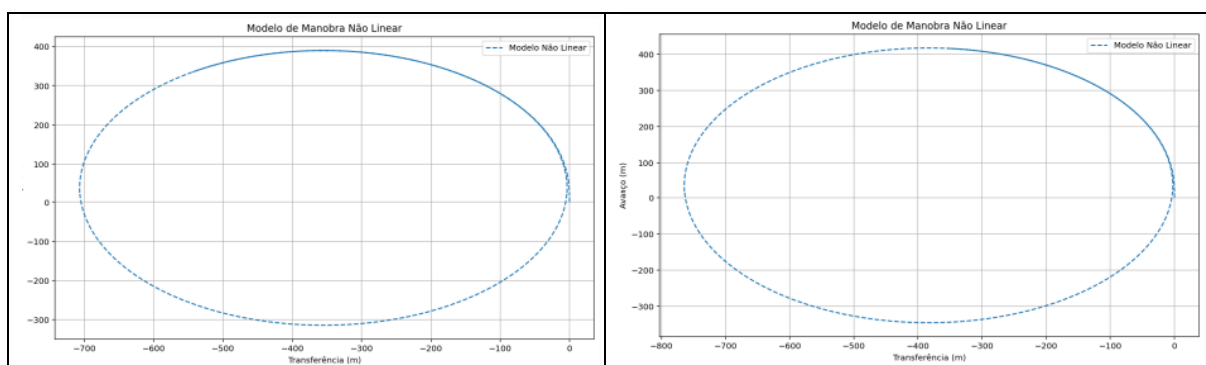


Fonte: (Amorim, 2025).

Observe que na configuração 1 x 2 a curva é fechada para o seu interior enquanto na configuração 2 x 2, o veículo faz a curva para a parte externa. Tais resultados foram simulados para águas profundas.

Para o arranjo 1 x 2, à esquerda tem-se a manobra para águas profundas e à direita para águas rasas. Observe que a curvatura é maior da embarcação, mostrando que, para a mesma velocidade, a embarcação apresenta uma curvatura maior.

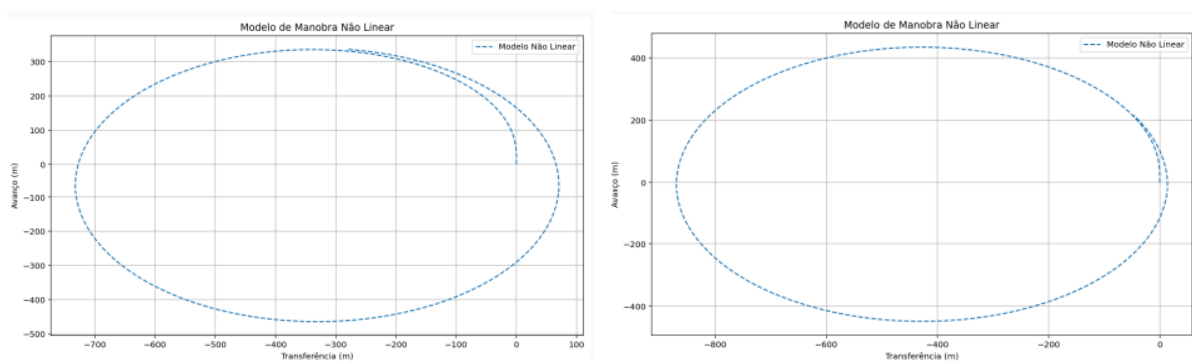
Fig. 4 – Manobra do comboio na configuração 1 x 2 em águas profundas e rasas



Fonte: (Amorim, 2025).

De forma similar, tem-se um resultado equivalente para o arranjo 2 x 2.

Fig. 5 – Manobra do comboio na configuração 2 x 2 em águas profundas e rasas



Fonte: (Amorim, 2025).

4. Considerações finais

O presente estudo desenvolveu um modelo matemático para uma embarcação formada por um empurrador e um conjunto de chatas para a manobra de embarcações, incorporando termos específicos para águas rasas e considerando as forças atuantes no sistema, como as derivadas hidrodinâmicas, o leme e o propulsor. Através da revisão sistemática, foi possível identificar lacunas na literatura e propor modelagens mais adequadas às condições reais da hidrovia Tietê-Paraná.

A implementação das equações dinâmicas em ambiente computacional permitiu gerar curvas de manobra para diferentes arranjos de barcas (1 x 2, 2 x 2 e 2 x 3) e profundidades de navegação, demonstrando a influência significativa da geometria do comboio e das condições do canal na manobrabilidade da embarcação. Os resultados obtidos evidenciam que a profundidade da água altera o desempenho hidrodinâmico, aumentando a curvatura da trajetória em águas rasas e, consequentemente, exigindo maior atenção ao planejamento das manobras.

Tais resultados vão ao encontro aos obtidos na literatura [1].

Como contribuição científica e prática, este trabalho oferece subsídios relevantes para o aprimoramento dos modelos de simulação de manobras, bem como para a formulação de diretrizes que favoreçam a segurança e a eficiência do transporte fluvial. A metodologia desenvolvida, aliada à fundamentação teórica e ao suporte computacional, constitui uma ferramenta robusta para estudos futuros na área de navegação interior e engenharia naval, especialmente em regiões com características semelhantes à da hidrovia Tietê-Paraná.

Referências

- [1] MAIMUN, A. et al. Manoeuvring prediction of pusher barge in deep and shallow water. **Ocean Engineering**, v. 38, n. 11–12, p. 1291–1299, ago. 2011.
- [2] MAIMUN, A.; MEFTAH, A. S.; MUHAMMAD, A. H. **Manoeuvring of pusher-barge in deep and shallow water**. 10th, Seminar of JSPS Marine Transportation Engineering,. **Anais...** Em: 10TH, SEMINAR OF JSPS MARINE TRANSPORTATION ENGINEERING,. Hiroshima, Japan: 2005.
- [3] ZHANG, C. et al. **Manoeuvring Modelling and Control Design of Autonomous Vessels on Inland Waterways**. Volume 5A: Ocean Engineering. **Anais...** Em: ASME 2024 43RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON OCEAN, OFFSHORE AND ARCTIC ENGINEERING. Singapore, Singapore: American Society of Mechanical Engineers, 9 jun. 2024. Disponível em: <<https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2024/87820/V05AT06A046/1202467>>. Acesso em: 1 mar. 2025
- [4] SUKAS, O. F.; KINACI, O. K.; BAL, S. System-based prediction of maneuvering performance of twin-propeller and twin-rudder ship using a modular mathematical model. **Applied Ocean Research**, v. 84, p. 145–162, mar. 2019.